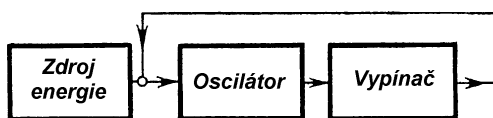


ELEKTRÓNKOVÝ GENERÁTOR – Van der Polova rovnica

29. novembra 2007

Samovoľné kmity (autooscilácie) sú kmity osobitého druhu.¹ Od vlastných kmitov oscilujúcich obvodov sa líšia mechanizmom vzniku ako aj mechanizmom zachovania (stability) amplitúdy. Systémom so sklonom k autoosciláciám je charakteristická prítomnosť zdroja energie (nemajúci náchylnosť oscilovať), z ktorého sa do systému dodáva energia, potrebná pre nahradenie nevyhnutných energetických strát.

Podľa stavby a princípu činnosti môžeme autooscilujúce systémy rozdeliť na dva typy. Pre prvý typ, ktorý sa skrátene volá *oscilátorový typ* je charakteristická štruktúra (stavba) znázornená na obrázku 1.

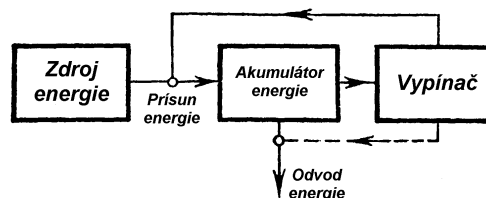


Obrázok 1: Blokové zapojenie autogenerátora oscilátorového typu

Tento systém pozostáva zo zdroja energie, pričom dodávanie energie do oscilátora sa nedeje samovoľne, ale realizuje sa pomocou regulačného mechanizmu (na obrázku 1 je to vypínač), ktorý je uvádzaný do činnosti samotným systémom. Vypínač funguje ako spätná väzba medzi kmitajúcim obvodom a zdrojom ener-

gie, zabezpečujúci prísun energie vo vhodnom okamihu periódy kmitov. Vďaka tejto spätnej väzbe sa v systéme vybudí stála autooscilácia. Niektoré príklady samokmitajúcich systémov oscilátorového typu sú uvedené v tabuľke 1.

Druhý typ autogenerátorového systému je tzv. *akumulačný typ*, ktorého bloková schéma je na obrázku 2.



Obrázok 2: Blokové zapojenie autogenerátora akumuláčného typu

Namiesto oscilátora sa v ňom používa „akumulátor energie“, pomocou ktorého sa prenáša energia cez systém. Vypínač, ktorý v tomto prípade reguluje akumulátor vykonáva činnosť spätnej väzby a ovplyvňuje prívod alebo odvod energie (do) z akumulátora. Ako príklad môžeme uviesť generátor pílovitých signálov.² Väčšina týchto generátorov je založená na periodickom nabíjaní a vybíjaní kondenzátora, ako akumulátora energie.

¹Autogenerator – the single transistor (in the older devices - vacuum tube) generator that was commonly used as the local oscillator in the superheterodyne radio receivers. Zdroj <http://en.wikipedia.org/wiki/Autogenerator>. Autogenerátor je napr. elektronický generátor harmonických kmitov. Generátor – v elektronickej obvodovej technike sa týmto pojmom označujú všetky základné zapojenia obvodov, ktoré vyrábajú (generujú) periodické, ale nesínusové kmity. Pre jednoduché generátory sínusových kmitov sa vžil označenie *oscilátor*. Oscilátor je vlastne elektronický obvod, ktorý je na svojom výstupe schopný dodávať harmonický signál bez budenia zdrojom signálu. V teórii elektronických obvodov sa veľmi často používa pojem *generátor napätia* a *generátor prúdu*. Nie sú to skutočné generátory, ale len fiktívne, ktoré nahrádzajú za určitých (obvodovo obmedzených) podmienok skutočné napätové meniče energie, napr. tranzistory, elektrónky, tónové alebo signálne generátory. Pre nás bude iste zaujímavý *spinový generátor*, ktorého princíp činnosti opíšeme v časti Spinový generátor.

²S týmito generátormi sa stretávame v osciloskopoch v ich časových základniach, v rozmietaných generátoroch (polyskopoch, wobleroch) určených na sledovanie frekvenčných charakteristík štvorpólov, v obvodoch pre automatické zobrazenie a zápis voltampérových charakteristík a pod. Podrobnejšie informácie o tomto type generátora nájdete na URL adrese http://alzat.spseke.sk/Oscilat/gen_pily/gen_pily.htm

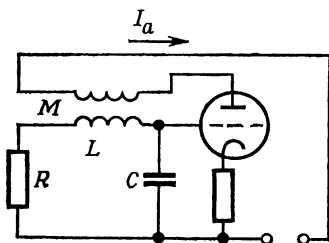
Tabuľka 1: Niekoľko príkladov samokmitajúcich systémov oscilátorového typu

SYSTÉM	ZDROJ ENERGIE	OSCILÁTOR	SPÔSOB SPÄTNEJ VÄZBY
Zvonček	Batéria (sieť)	Kladivko	Kontakt
Mechanické hodiny	Natiahnutá pružina	Nepokoj	Spúšťací regulátor
Elektrónkový oscilátor	Batéria, stab. zdroj	LC rezonančný obvod	Regulačné pôsobenie na mriežku elektrónky
Husľová struna	Sláčik	Struna	Suché trenie

Metóda riešenia

Rovnice, ktoré opisujú pohyb v autooscilujúcich systémoch sú vždy nelineárne. Na ich riešenie bol navrhnutý rad metód, ktoré však v tomto príspevku nebudeme opisovať, podrobnejšie informácie môžete nájsť napr. v knihe Koteka a Kubíka (1962).

Charakteristickým príkladom rovnice autooscilujúceho systému je rovnica Van der Pola. V tejto časti ukážeme, aký fyzikálny proces opisuje táto rovnica a ako príklad použijeme elektrónkový generátor, ktorého schéma je na obrázku 3.



Obrázok 3: Schéma elektrónkového generátora

V tomto generátore je obvod pozostávajúci z ohmického odporu R , cievky so samoindukciou L a kondenzátora C . Spád napätia na ohmickom odpore sa kompenzuje napätím vznikajúcim v cievke kmitavého obvodu vďaka indukčnej väzbe s cievkou, ktorá je zapojená do anódového obvodu elektrónky. Fáza vznikajúceho napätia je taká, že fáza napätia kmitavého obvodu a napätia na cievke v anódovom obvode sa rovnajú. Napätie na mriežke elektrónky, a teda aj veľkosť anódového prúdu, je určené napätím na kondenzátore C .

Rovnicu opisujúcu kmitavý proces môžeme napísať z rovnice napätí na RLC obvode. Od rovnice, ktorá opisuje oscilačný proces v jednoduchom RLC obvode, pozri napr. študijné

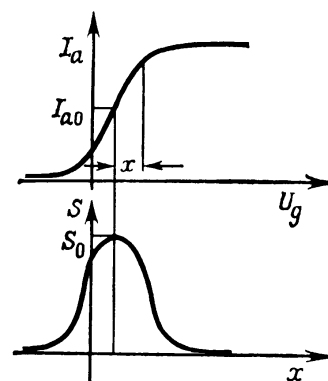
príručky (Hlaváčová a kol., 2007, str. 62) (Hlaváčová a kol., 2006, str. 49), sa bude líšiť napätovým členom, ktorý vzniká na cievke kmitavého obvodu v dôsledku samoindukcie. Keď je prúd anódového okruhu rovný I_a a koeficient vzájomnej indukčnosti $M > 0$, potom toto doplnkové napätie môžeme zapísať v tvare

$$U_K = -M \frac{dI_a}{dt}. \quad (1)$$

Znamienko mínus vyjadruje, že energia vstupuje do kmitavého obvodu a závisí od smeru vinutia cievok. Dostávame teda rovnicu

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q - M \frac{dI_a}{dt} = 0. \quad (2)$$

Závislosť anódového prúdu od napätia na mriežke je určená charakteristikou elektrónky (horný graf na obrázku 4).


 Obrázok 4: Anódová charakteristika elektrónky a jej strmosti S

Pre strednú hodnotu anódového prúdu I_{a0} , ktorá je určená nastaveným pracovným bodom elektrónky, môžeme napísať rovnicu

$$I_a = I_{a0} + f(x) \quad (3)$$

a pre jej prvú deriváciu platí

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{dI_a}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = S(x) \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

kde $S(x)$ je smernica charakteristiky (strmost') elektrónky (dolný graf na obrázku 4). Keďže zmena napätia na mriežke je rovná

$$\Delta U_g = x = \frac{Q}{C}, \quad (5)$$

môžeme rovnicu (2) prepísať do nasledujúceho tvaru³

$$LC \frac{d^2x}{dt^2} + RC \frac{dx}{dt} + x - MS(x) \frac{dx}{dt} = 0. \quad (6)$$

V ďalšom kroku vykonáme zmenu premennej zavedením bezrozmernej veličiny $\tau = \omega_0 t$, pričom podľa všetkého platí $2b = R/\omega_0 L = R\sqrt{C/L}$, $\omega_0^2 LC = 1$ a rovnicu (6) teda môžeme prepísať na tvar

$$x'' - \left[\frac{MS(x)}{\sqrt{LC}} - 2b \right] x' + x = 0, \quad (7)$$

kde znak ' znamená deriváciu podľa τ .

Strmost' elektrónky $S(x)$, ktorá vystupuje v rovnici, môžeme považovať približne za párnú funkciu a aproximovať ju radom

$$S(x) = S_0 - S_2 x^2 + S_4 x^4 + \dots \quad (8)$$

Keď upriamime pozornosť len na prvé dva členy radu a zohľadníme predpoklad, že $S(x)$ má približne tvar kvadratickej paraboly, t. j. $S(x) = S_0(1 - x^2)$, kde S_0 je strmost' elektrónky v pracovnom bode a keď zavedieme tieto označenia

$$\alpha = \frac{MS_0}{\sqrt{LC}} - 2b, \quad \beta = \frac{MS_0}{\sqrt{LC}}, \quad (9)$$

³ Účinkom kladnej spätnej väzby (uskutočnenej spomenutou indukčnou väzbou s koeficientom vzájomnej indukcie M) sa do okruhu RLC vnáša záporný odpor (pozri rovnicu (6) a poznámku o zápornom odpore na konci tejto časti), ktorý vykompenzuje stratový odpor cievky R a okruh odtlmí. Koeficient pri dx/dt v rovnici (6) je rovný súčtu ohmického odporu R a záporného odporu $MS(x)/C$. Čiže tlmenie závisí od koeficienta väzby M a strmosti $S(x)$. Zvyčajne sa M volí také, aby sa zmenšilo tlmenie. Keď je hodnota záporného odporu taká, že koeficient pred dx/dt je rovný nule, vznikajú netlmené kmity, t. j. generovanie. Záporný odpor vnesený do obvodu počas periódy nezostáva konštantný, ale jeho stredná hodnota sa znižuje tak, že so vzrastom amplitúdy kmitov obvodu pracovného bodu po dynamickej krivke charakteristiky elektrónky sa rozširuje a pracovný bod sa presunie do oblasti, kde je strmost' menšia. Na riešenie problému, aká bude amplitúda ustáleného kmitania je potrebné riešiť úlohu so zahrnutím kubického člena v aproximácii $S(x)$, čím sa zabezpečí ohraničenie narastania amplitúdy. Amplitúdu kmitov už potom ustáľuje elektrónka samočinne.

⁴ Rovnicu prvýkrát získal a analyzoval holandský fyzik a inžinier *Balthazar Van der Pol* (1889–1959) v súvislosti so štúdiom negatívneho odporu v elektrónkach, ako výskumný pracovník vo firme Philips Company.

z rovnice (7) dostávame tzv. *Van der Polovu rovnicu* (1920; 1926)⁴

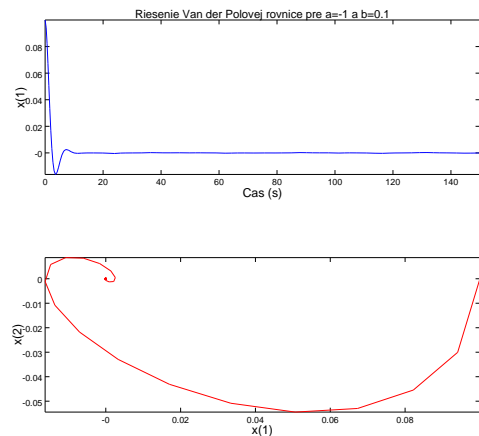
$$x'' - (\alpha - \beta x^2)x' + x = 0. \quad (10)$$

Z tohto postupu vidíme, že rovnica (10) predstavuje len približnú rovnicu elektrónkového generátora. V závislosti od tvaru charakteristiky elektrónky a formy (podoby) aproximácie pre strmost' môžeme získať rovnice s inými koeficientmi pri x' .

Z rovníc (9) a (10) vyplýva, že netlmené kmity vznikajú len vtedy, keď koeficient vzájomnej indukčnosti M dosiahne nejakú minimálnu hodnotu, takže musí byť splnená nerovnosť $\alpha > 0$, ktorú použitím vzťahu (9) môžeme prepísať na tvar

$$M > M_0 = \frac{2b\sqrt{LC}}{S_0} = \frac{RC}{S_0}. \quad (11)$$

Veličina M_0 vyjadruje tzv. *hranicu autogenerácie*, pri ktorej prekročení vznikajú autogenerované kmity (samovoľné kmity generátora).

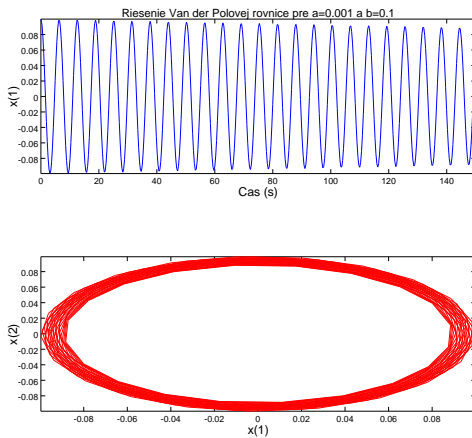


Obrázok 5: Časový priebeh a fázová trajektória riešenia Van der Polovej rovnice pre parametre $\alpha = -1$ a $\beta = 0,1$

Veľkosť parametra α je mierou „sily“ budenia generátora (pri $\alpha < 0$ nie je splnená podmienka autogenerácie kmitov, pozri obrázok 5). Parameter β charakterizuje amplitúdu autooscilácií, čím je menší, tým je amplitúda väčšia.

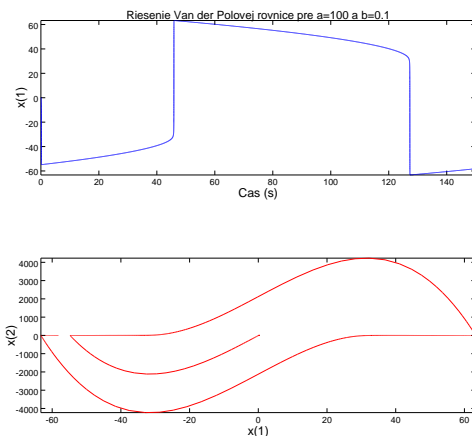
Pre

1. $\alpha = 0$ bude systém lineárny (konzervatívny),
2. $\alpha \ll 1$ autooscilácie sa budú len veľmi málo líšiť od harmonických (predpoklad z bodu 1), pozri obrázok 6,



Obrázok 6: Časový priebeh a fázová trajektória riešenia Van der Polovej rovnice pre parametre $\alpha = 0,001$ a $\beta = 0,1$

3. $\alpha \gg 1$ sa „tvar autooscilácií“ nedá aproximovať sínusovkou, pozri obrázok 7.



Obrázok 7: Časový priebeh a fázová trajektória riešenia Van der Polovej rovnice pre parametre $\alpha = 100$ a $\beta = 0,1$

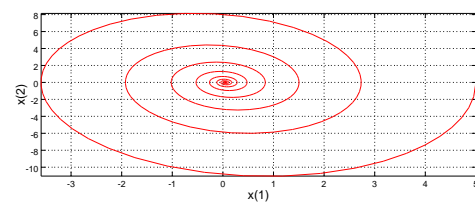
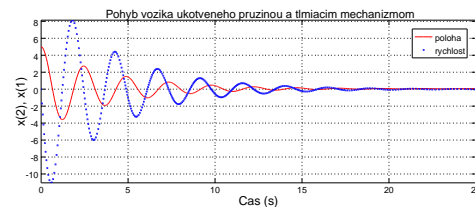
Poznámky

Stavový priestor

Vývoj systému je možné znázorniť v tzv. *stavovom priestore*. Stavový priestor je zobrazenie stavových veličín v závislosti od seba samých. V každom časovom okamihu dostaneme v stavovom priestore jeden bod. Spojením týchto bodov vznikne *stavová (fázová) trajektória*, ktorú znázorňujeme rovinným grafom $x_i = f(x_j)$. O stavovej trajektórii má zmysel hovoriť, keď systém obsahuje aspoň dve stavové veličiny. Napr. na obrázku 8 je znázornený časový priebeh výchylky a rýchlosti, a fázová trajektória týchto veličín pre vozík, ktorý je ukotvený o stenu pružinou s tuhosťou k_p a tlmiacim mechanizmom s koeficientom tlmenia k_t . Priebehy v hornom grafe sú výsledkom riešenia pohybovej rovnice uvedeného systému

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + k_p \frac{dx(t)}{dt} + k_t x(t) = f, \quad (12)$$

kde f je vonkajšia sila, m je hmotnosť a $x(t)$ je poloha vozíka.

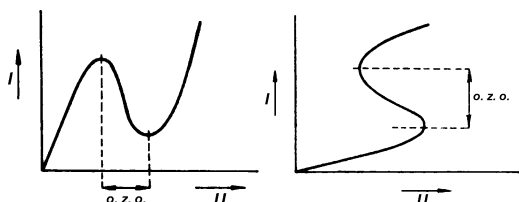


Obrázok 8: Horný graf znázorňuje charakteristiku a tvar priebehu rýchlosti $x(2)$ (modrá bodkovaná krivka) a polohy $x(1)$ (červená krivka) vozíka v závislosti od času. Dolný graf znázorňuje fázový portrét (fázovú trajektóriu) rýchlosti a polohy vozíka

Záporný odpor

Ako sme to už v úvodnej poznámke pod čiarou spomenuli, oscilátor je elektronické zariadenie generujúce sínusové napätie určitého

kmitočtu. Podľa princípu vzniku kmitov môžeme oscilátory rozdeliť do dvoch základných skupín: (1) Oscilátory so *spätnou väzbou*, ktoré kmitajú preto, lebo energia potrebná na udržanie kmitov sa zavádza pomocou (prostredníctvom) spätnej väzby z výstupu zosilňovača na jeho vstup. (2) Oscilátory so *záporným odporom*, ktoré využívajú priamu výmenu energie medzi nelineárnym prvkom vykazujúcim záporný odpor a všetkými stratovými prvkami kmitajúcej sústavy. Záporný odpor je vlastne *diferenciálny odpor* v určitej časti voltampérovej charakteristiky niektorých nelineárných súčiastok. Pre záporný odpor je charakteristické, že nárastu prúdu zodpovedá pokles napätia, čiže hodnota $R_z = dU/dI$ je záporná. Záporný odpor majú za istých podmienok tyristor, tetróda, tunelová dióda, tlejivka, elektrický oblúk a iné súčiastky. Aj zosilňovač sa môže správať ako záporný odpor zavedením vhodnej spätnej väzby. Záporné odpory sa používajú na *odtlmenie* obvodov, napr. na generovanie sínusových a nesínusových kmitov najrôznejších kmitočtov. Nelineárne prvky so záporným odporom môžu mať dva základné tvary voltampérových charakteristík. Obyčajne sa označujú ako tvary N a S, pozri obrázok 9.



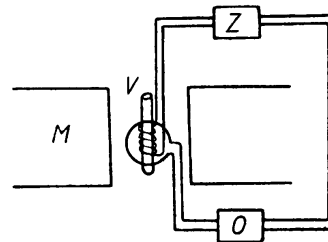
Obrázok 9: Voltampérové charakteristiky typu N a S s oblasťami záporného odporu (o. z. o.)

Z charakteristík je zrejmé, že sa oblasť záporného odporu môže meniť v širokej oblasti so zmenou polohy pracovného bodu. Je rôzna aj pre súčiastky toho istého typu.

Spinový generátor

Spinový generátor využíva v spätoväzbovej slučke ako selektívny člen spinový systém, čo je súbor atómových jadier vykazujúcich spin a magnetický moment. Je to v podstate širokopásmový zosilňovač, na ktorého vstup je pripojená snímacia cievka signálu jadrovej magne-

tickej rezonancie, ktorá obsahuje vhodnú látku, napr. vodu. Na výstup zosilňovača je pripojená budiaca cievka orientovaná kolmo na snímaciu cievku (pozri obrázok 10).



Obrázok 10: Bloková schéma spinového generátora. M je pólový nástavec magnetu, V je ampulka s vodou, Z je širokopásmový RF zosilňovač, O je amplitúdový obmedzovač

Zosilnenie v slučke je volené tak, že „zostatková väzba“ spôsobená nedokonalosťou geometrie (vzájomnou kolmostou) cievok nestačí na rozkmitanie zosilňovača. Vložením oboch cievok do homogénneho magnetického poľa je spinový systém schopný na frekvencii jadrovej magnetickej rezonancie prijímať (absorbovať) energiu z vysielacej cievky a odovzdávať ju prijímacej cievke, čo vlastne predstavuje selektívne zvýšenie vzájomnej väzby, ktorá vedie k rozkmitaniu zosilňovača. Frekvencia spinového generátora sleduje bezprostredne zmeny magnetického poľa, čo môžeme využiť na meranie prípadne na stabilizáciu magnetického poľa.

Literatúra

- HLAVÁČOVÁ, J. – ZIMAN, J. – KOVAĽÁKOVÁ, M. – ZAGYI, B. 2007. Fyzika II, *elfa*, s. r. o., Košice, 2007, s. 62
- HLAVÁČOVÁ, J. – KOVAĽÁKOVÁ, M. – ŠEVČOVIČ, L. 2006. Zbierka úloh z fyziky, *elfa*, s. r. o., Košice, 2006, s. 49, postup riešenia úlohy 10.20. najdete na URL adrese <http://people.tuke.sk/ladislav.sevcovic/CasPremElmg_pole.pdf>
- KOTEK, Z. – KUBÍK, S. 1962. Nelineární obvody, SNTL – SVTL, Praha, 1962
- VAN DER POL, B. 1920. *A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations*, Radio Review, 1, 1920, pp. 701–710, 754–762



VAN DER POL, B. 1926. *On "Relaxation-Oscillations"*, The London, Edinburg, and

Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser. 7, 2, 1927, pp. 978–992

Na numerické riešenie diferenciálnych rovníc uvedených v tomto príspevku sme použili open source program Octave s grafickým ovládačom OctPlot.