NEISTOTY

Základné pojmy a definície z oblasti neistôt meraní

Ladislav Ševčovič

Košice 23. septembra 2007

OBSAH

1 Základné pojmy a definície z oblasti neistôt meraní

V súčasnosti sa v metrológii, pri fyzikálnych a technických meraniach postupne prechádza na nové metódy vyjadrovania odchýlok. Doterajšie *chyby meraní* sú v súlade s medzinárodnými predpismi ISO a IEC nahradzované *neistotami meraní*. Za hlavný dokument je možné považovať predovšetkým smernicu, ktorá bola vydaná pod názvom *Guide to Expression of the Uncertainty of Measurement (GUM)* (ISO, Switzerland 1995) medzinárodnými metrologickými orgánmi v roku 1993, korigovaná a doplnená v roku 1995. Pre prírodovedcov bude iste zaujímavé navštívit' WWW stránku Národného inštitútu štandardov a technológií Spojených štátov amerických (NIST, 2006) `http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/basic.html`, ktorá prináša základné informácie o neistotách a ich vyjadrovaní.
Uvádzame zoznam niektorých významných medzinárodných organizácií, ktoré tento projekt podporujú:

- BIPM Bureau International des Poids et Mesures
- IEC International Electrotechnical Commission
- IFCC International Federation of Clinical Chemistry
- ISO International Organization for Standardization
- IUPAC International Union of Pure and Applied Chemistry
- IUPAP International Union of Pure and Applied Physics
- OIML International Organization of Legal Metrology

Aplikovanie a zavádzanie nových experimentálnych metód, prístrojov a pracovných postupov, práve tak, ako používanie starších a osvedčených metód, by malo byt' podložené štúdiom ich vlastností, aby ich neskoršie používanie nenarážalo na nejasnosti pri interpretácii výsledkov získaných použitými postupmi a metódami.

Medzi základné problémy nepochybne patria otázky presnosti a správnosti, alebo skôr nepresnosti a nesprávnosti meraní. Definícia týchto dvoch pojmov je dost' t'ažká, avšak ich obsah je intuitívne celkom jasný. *Správnost'* súvisí s tým, ako sa meranie (namerané hodnoty) zhodujú so skutočnou meranou hodnotou, zatial' čo *presnost'* súvisí s tým, ako sa opakované merania (namerané hodnoty) zhodujú medzi sebou. Môžeme teda hovorit' o *systematických chybách*, ktoré sa prejavujú ako stály rozdiel medzi nameranými hodnotami (alebo ich strednou hodnotou) a skutočnou (správnou)[1] hodnotou a o *náhodných chybách*, ktoré sa prejavujú vo variabilite nameraných hodnôt okolo ich strednej hodnoty. Uvádzajú sa ešte *hrubé chyby*, ktoré vznikajú napr. poruchou prístrojov, nepozornost'ou pracovníka, krátkodobou zmenou experimentálnych podmienok a pod.

Variabilita nameraných hodnôt má dve základné príčiny, ktoré väčšinou pôsobia súčasne:

- vlastnosti vyšetrovaného javu (napr. neodstranitel'ná nehomogenita vyšetrovaného materiálu, fluktuácie vyvolané fyzikálnymi procesmi a pod.)
- a technické nedostatky meracej metódy (nepresnost' meracieho zariadenia, nepresnost' pri príprave vzoriek, zmeny prostredia, v ktorom meranie prebieha, t. j. teplota, vlhkost' vzduchu a pod. a tiež vplyv osôb, ktorí sa experimentu, merania zúčastňujú).

Je potrebné teda pamätat' na oba zdroje neistôt a snažit' sa o udržanie čo najstabilnejších podmienok na prevádzanie meraní. V d'alšom nás budú zaujimat' otázky súvisiace s presnost'ou (opakovatel'nost'ou),

[1] Niektorí autori používajú aj pomenovanie „pravá“ vo význame hodnoty získanej naprosto presným meraním (PALENČÁR A KOL., 2000).

budeme pritom predpokladať, že metóda merania je správna, t. j. že sa správna hodnota rovná strednej hodnote rozdelenia nameraných hodnôt. O náhodných chybách sa spravidla predpokladá, že sú rozdelené normálne, tento predpoklad, ktorý býva obvykle splnený aspoň približne budeme v ďalšom akceptovať; vo všeobecnosti však nemusí byť splnený.

Stručný slovník pojmov

Aritmetický priemer je súčet hodnôt pozorovaní (meraní, odčítaní a pod.) delený počtom hodnôt

$$x_i = \overline{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{i,k}. \tag{1}$$

Citlivosť meracieho prístroja je prakticky zmena hodnoty meranej veličiny, ktorá korešponduje s najmenším dielikom stupnice. Pre číslicové meracie prístroje je to podiel počtu číslic zmeny údaja a zmeny vstupnej veličiny, ktorá zmenu vyvolala.

Disperzia (variancia) pozri *Rozptyl*.

Chyba, máme tu ma mysli chybu meracieho prístroja, ktorá má svoj pôvod v konštrukčnom usporiadaní, v konečnom delení stupnice meraných hodnôt a pod. Základnými zdrojmi chýb sú:

- nedokonalosť meracích prístrojov,
- stárnutie a opotrebenie meracích prístrojov, čím sa môžu meniť ich charakteristiky a parametre,
- chyby experimentátora,
- nepresné metódy vyhodnocovania meraní,
- vplyv linearizácie, interpolácie a zaokrúhľovania,
- zlá kalibrácia, inštalácia alebo umiestnenie prístrojov atď.

Chyba merania (odchýlka) je rozdiel medzi nameranou X_i a skutočnou hodnotou μ určujúcej veličiny v tom istom okamihu. Pri meraní určitej veličiny sa prevádza len konečný počet meraní. Predpokladajme, že bolo prevedené meranie veličiny X a získané hodnoty $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ktorých chyby môžeme vyjadriť vzťahom

$$\Delta X_i = X_i - \mu \tag{2}$$

a majú normálne rozdelenie. Aritmetický priemer nameraných hodnôt X_i podľa (1) dáva najpravdepodobnejšiu hodnotu meranej veličiny $\mu \equiv \overline{X}_i$.

Korelácia je kvantitatívna miera vzťahu medzi dvoma veličinami vyjadrujeme ju ako

$$r(x_i, x_k) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)(x_k - \overline{x}_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)^2 \sum_{i=1}^{n}(x_k - \overline{x}_k)^2}} = \\ = \frac{D(x_i, x_k)}{\sqrt{D(x_i)}\sqrt{D(x_k)}}, \tag{3}$$

kde $D(x_i, x_k)$ je kovariancia, $D(x_i)$ a $D(x_k)$ sú disperzie, pričom $-1 \leqq r(x_i, x_k) \leqq 1$. Hodnota $r(x_i, x_k) = 1$ znamená, že ide o funkčnú rastúcu závislosť, hodnota $r(x_i, x_k) = -1$ znamená funkčnú klesajúcu závislosť. Obidva prípady a prívlastok funkčný zodpovedajú situácii, keď všetky body ležia na priamke. Ak sú skúmané veličiny nezávislé, bude $r(x_i, x_k) = 0$, ale naopak nulový koeficient korelácie nemusí znamenať nezávislosť. Môže ísť o (to byť) zložitejší vzťah, napr. závislosť, ktorá v jednej časti rastie a v druhej klesá. Korelácia je štatistická (pravdepodobnostná) závislosť dvoch náhodných veličín (premenných). Symbolom x_i a x_k sa tu nedáva bežný význam nezávisle a závisle premennej, pretože ani jednej z náhodných premenných nepriznávame charakter príčiny alebo následku.

Kovariancia (vzájomný rozptyl) je spoločná menlivosť daných dvoch vlastností a charakterizuje väzbu hodnôt výberu

$$D(x_i, x_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_{i,j} - \overline{x}_i)(x_{k,j} - \overline{x}_k). \tag{4}$$

Merací prístroj je zariadenie určené na prevod meranej veličiny na signál nesúci informáciu o jej hodnote (údaj). Charakterizujeme ho cilivosťou, schopnosťou replikovať údaje, rozptylom, presnosťou, hustotou pravdepodobnosti chýb meraní a pod. Priebeh registrácie môže byť spojitý, keď je registrácia číslicová potom má schodíkový tvar.

Náhodný výber rozsahu n je n-tica náhodných premenných, ktoré sú stochasticky nezávislé a majú rovnak rozdelenie pravdepodobnosti.

Neistota merania (skrátene neistota) je parameter, ktorý súvisí s výsledkom merania a ktorý určuje rozptyl hodnôt, ktoré môžeme ešte racionálne priradiť k meranej veličine. (*Neistota* je teda interval, v ktorom sa s určitosťou, definovanou pravdepodobnosťou bude skutočná hodnota nachádzať.) Neistoty (z jednotlivych zdrojov) môžeme vyhodnocovať dvoma základnými metódami:

- štatistickými metódami z nameraných údajov, ktoré sa nazývajú *neistoty stanovené metódou A*, skrátene ich voláme neistoty typu A a označujeme ich ako $u_{\mathrm{A}}(x_i)$,
- neistoty získané iným spôsobom ako v predošlom prípade, ktoré sa nazývajú *neistoty stanovené metódou B*, skrátene ich voláme neistoty typu B a označujeme ich ako $u_{\mathrm{B}}(x_i)$ (napr. výsledky získané pri predchádzajúcich meraniach, špecifikácie od výrobcu meracieho prístroja, údaje z certifikátov, kalibračných listov, neistoty referenčných údajov a pod.).

Vhodným zlúčením štandardných neistôt zo všetkých zdrojov získame celkovú (kombinovanú) štandardnú neistotu. Treba zdôrazniť, že nečleníme neistoty, ale metódy ich vyhodnocovania na metódu A a metódu B. Neistoty určené oboma metódami sú rovnocenné, pokiaľ boli určené korektne.

Normálné (Gaussove) rozdelenie sa používa na aproximáciu v prípadoch, keď sa často vyskytujú malé odchýlky od menovitej hodnoty, pričom s rastúcou veľkosťou odchýlok pravdepodobnosť ich výskytu klesá, napr. keď je zdrojom neistoty merací prístroj od spoľahlivého výrobcu (môžeme predpokladať, že väčšina prístrojov bude zdrojom malých chýb).

Opakovateľnosť (replikovateľnosť) je charakteristika meracieho systému a znamená, že distribučná funkcia chyby merania sa nemení pri opakovaní meraní, teda akékoľvek súbory dát získané z nezávislých opakovaných meraní hodnoty f nejakej veličiny je možné modelovať ako realizáciu náhodných výberov z toho istého rozdelenia pravdepodobnosti. Stálosť distribučnej funkcie je podmienkou replikovateľnosti meracieho systému. Merací prístroj bez driftu musí pri opakovanom meraní jednej a tej istej hodnoty vykazovať vlastnosť, ktorá sa volá *replikovateľnosť*. Matematicky to znamená, že súbory nezávisle nameraných dát sú realizáciou *náhodného výberu* z toho istého rozdelenia pravdepodobnosti (Kubáček a Kubáčková, 2000).

Presnosť merania je miera nesúhlasu nameranej a skutočnej hodnoty určujúcej veličiny.

Reprodukovateľnosť merania je opakovateľnosť výsledkov merania prevedených za rovnakých podmienok, ale v rôznych časových okamihoch.

Rovnomerné (pravouhlé) rozdelenie pravdepodobnosti sa používa v prípadoch, keď pravdepodobnosť výskytu ktorejkoľvek odchýlky v celom intervale $\pm z_{j\max}$ je rovnaká. V praxi sa používa najčastejšie, predovšetkým preto, že väčšinou nemáme k dispozícii dostatočné poznatky o rozdelení pravdepodobnosti výskytu odchýlok a teda nemáme dôvod dávať niektorým odchýlkam prednosť tým, že použijeme iný typ rozdelenia. Spojitá náhodná veličina X sa riadi zákonom rovnomerného rozdelenia (má rovnomerné rozdelenie), keď jej možné hodnoty ležia (nachádzajú sa) v určených hraniciach, okrem toho v hraniciach tohto intervalu sú všetky hodnoty náhodnej veličiny rovnako pravdepodobné (majú rovnakú hustotu pravdepodobnosti rozdelenia). S náhodnou veličinou, ktorá má vlastnosti rovnomerného rozdelenia sa často stretávame v meracej technike (praxi) pri zaokrúhľovaní údajov z meracích prístrojov na celý dielik delenia stupnice. Chyba pri zaokrúhľovaní údaja stupnice na najbližší dielik delenia je náhodná veličina X_i, ktorá môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu medzi dvoma susednými dielikmi stupnice s konštantnou hustotou pravdepodobnosti. *Keď sa chyby podriaďujú zákonu rovno-*

merného rozdelenia počet prevedených meraní nemá vplyv na stupeň hodnovernosti výsledku merania na rozdiel od iných zákonov rozdelenia, napr. normálneho, kde zvyšovaním počtu meraní a ich spracovaním, môžeme podstatne zvýšiť presnosť odhadu meranej veličiny.

Rozdelenie pravdepodobnosti je funkcia vyjadrujúca pravdepodobnosť, že meranie (náhodná veličina) nadobudne určitú hodnotu alebo hodnoty z istého intervalu.

Rozptyl je stredná hodota druhej mocniny odchýlky náhodnej veličiny od jej strednej hodnoty

$$D(X_i) = s^2(X_i) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_{i,k} - \overline{X}_i)^2}{n-1}. \tag{5}$$

Rozptyl registrácie je definovaný *disperziou* (druhým centrálnym momentom teoretickej distribúcie chýb merania daným prístrojom). Niekedy sa nazýva aj charkteristikou *vnútornej presnosti*. Charakteristika *vonkajšej presnosti* pri danom počte opakovaných meraní n konkrétnej hodnoty f_i je daná hodnotou veličiny

$$E\left[(\hat{f} - f_i)^2\right] = \frac{s^2}{n} + B^2, \tag{6}$$

kde $B = E(\hat{f}) - f_i$, $\hat{f}$ je uvažovaný odhad veličiny f, $E[\cdot]$ a $E(\cdot)$ vyjadrujú strednú hodnotu veličiny. Hodnota B sa nazýva vychýlenosť (bias) odhadu $\hat{f}$. Keď prístroj (súbor dát získaných prístrojom) je charakterizovaný hustotou pravdepodobnosti, pre ktorú platí $E(X_i) = 0$, potom sú charakteristiky vonkajšej a vnútornej presnosti zhodné. *Rozptyl (disperzia) meracieho prístroja* je jeho dôležitou charakteristikou, avšak *nevystihuje úplne* štatistické správanie chýb. Lepšiou charakteristikou správania chýb meraní je ich rozdelenie pravdepodobnosti. Pri použití meracieho prístroja vzniká problém, ako túto hustotu poznať aspoň približne (KUBÁČEK A KUBÁČKOVÁ, 2000).

Rozšírená neistota je veličina definujúca interval okolo výsledku merania, ktorý zahrňuje veľkú časť rozdelenia pravdepodobnosti hodnôt, ktoré je možné priradiť k meranej veličine.

Signál je fyzikálna veličina, ktorá je nositeľkou pridanej namodulovanej informácie.

Smerodajná odchýlka je druhá odmocnina z rozptylu príslušného rozdelenia pravdepodobnosti.

Štandardná neistota merania je neistota merania vyjadrená ako smerodajná odchýlka. Pojem *štandardná neistota* (v meraní) a *smerodajná odchýlka* (odmocnina z disperzie resp. z rozptylu; charakterizuje presnosť merania) znamenajú to isté.

Trojuholníkové (Simpsonove) rozdelenie sa používa na modelovanie situácií (prípadov), ktoré sa podobajú normálnemu rozdeleniu.

Vstupný odhad je výsledok merania vypočítaný z odhadov vstupných dát pomocou funkcie modelu merania.

Výberová smerodajná odchýlka je druhá odmocnina výberového rozptylu. Náhodnú chybu v klasickej teórii chýb najčastejšie zastupuje smerodajná odchýlka výberového súboru

$$s(X_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_{i,k} - \overline{X}_i)^2}{n-1}}, \tag{7}$$

zriedkavo smerodajná odchýlka aritmetického priemeru

$$s(\overline{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_{i,k} - \overline{X}_i)^2}{n(n-1)}}. \tag{8}$$

Výberový rozptyl je veličina charakterizujúca roptýlenie výsledkov série n pozorovaní (meraní, odčítaní a pod.) rovnakej meranej veličiny, získaná ako druhá mocnina *výberovej smerodajnej odchýlky*.

Výsledok merania je hodnota, ktorá prislúcha meranej veličine a bola získaná meraním. Keď použijeme pomenovanie výsledok merania, musíme uviesť, či sa vzťahuje na:

- údaj meradla (meracieho prístroja),
- nekorigovaný výsledok,
- korigovaný výsledok.

Nekorigovaný výsledok je taký výsledok merania, pri ktorom nie sú uplatnené korekcie známych systematických chýb. *Korigovaný výsledok* merania je výsledok po korekcii systematických chýb. Výsledkom merania je často hodnota získaná

výpočtom z výsledku viacerých opakovaných meraní.Vzhľadom na to, že skutočnú hodnotu meranej veličiny zisťujeme procesom merania, ktorý je zaťažený rôznymi chybami, výsledok merania je len odhadom (skutočnej) hodnoty meranej veličiny. Pri udávaní výsledku merania je preto dôležité stanoviť aj kvalitu tohto odhadu, ktorá sa definuje pomocou *neistoty*. *Úplný údaj výsledku* obsahuje okrem výslednej hodnoty meranej veličiny aj údaj o neistote merania. (WIMMER A KOL., 2001, str. 103)
Výstupná veličina je veličina, ktorá pri vyhodnotení merania predstavuje meranú veličinu.

Typy neistôt

Ako sme to už spomenuli, je pojem neistota (neistota merania) spojený s označením parametera súvisiaceho s výsledkom merania a charakterizujúceho rozsah hodnôt, ktoré môžeme racionálne priradiť meranej veličine. Zmienili sme sa aj o tom, že neistota sa skladá z niekoľkých zložiek. Na určenie ich veľkosti sú principiálne k dispozícii tieto dve metódy:

- štatistické spracovanie nameraných údajov (metóda typu A),
- iné ako štatistické spracovanie nameraných údajov (metóda typu B).

Niekedy sa neistoty získané metódou A stručne označujú ako *neistoty typu A*, podobne neistoty získané metódou B ako *neistoty typu B*. Z týchto základných typov neistôt sa potom ľahko pomocou súčtu ich štvorcov určí výsledná *kombinovaná neistota* u_C. Predpokladajme, že máme jednoduchú výstupnú modelovú funkciu niekoľkých vstupných parametrov $f = F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$, kde f je odhad výstupnej veličiny, x_i sú odhady vstupných veličín a F je známy funkčný vzťah. Vo všeobecnosti potom môžeme pre neistotu u_f odhadu f napísať vzťah

$$u_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} A_i^2 u_{x_i}^2}, \tag{9}$$

kde u_{x_i} sú jednotlivé zložky neistôt, A_i je koeficient citlivosti (prevodu) príslušného zdroja neistoty, ktorý poznáme alebo sa určí ako parciálna derivácia funkcie f podľa príslušnej vstupmej veličiny x_i

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)}{\partial x_i}. \tag{10}$$

Vidieť, že celá metodika určenia je dosť komplikovaná, preto v nasledujúcich častiach ukážeme len základnú metodiku a hĺbavého čitateľa odkážeme na preštudovanie príslušnej literatúry (PALENČÁR A KOL., 2000; VDOLEČEK A KOL., 2001a,b, 2002a,b; UHRIN A KOL., 2006; MELOUN A MILITKÝ, 2004).

Vyhodnotenie štandardných neistôt vstupnej veličiny metódou typu A

Metóda vyhodnotenia tohto typu neistôt je založená na štatistickej analýze opakovanej série meraní. Keď máme n nezávislých rovnako presných pozorovaní ($n > 1$), bude odhad výslednej hodnoty f reprezentovaný hodnotou výberového priemeru (aritmetického priemeru) $\overline{f}_i$. Neistota prislúchajúca odhadu f sa určí ako smerodajná odchýlka $s(\overline{f}_i)$ tejto výslednej hodnoty, teda výberového priemeru $\overline{f}_i$. Tento typ neistoty sa označí ako $u_{\mathrm{A}f}$ a môžeme ju vyjadriť v tvare

$$u_{\mathrm{A}f} = s(\overline{f}_i) = \frac{s(f_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(f_{i,k} - \overline{f}_i)^2}{n(n-1)}}. \tag{11}$$

Táto neistota je spôsobená kolísaním nameraných údajov. Keď máme k dispozícii malý počet meraní ($n < 10$) je hodnota určená podľa tohto vzťahu nespoľahlivá a mali by sme túto neistotu (spôsobenú kolísaním nameraných údajov) odhadnúť metódou typu B na základe iných informácií ako sú súčasné namerané údaje.

Vyhodnotenie štandardných neistôt vstupnej veličiny metódou typu B

Ako sme to už uviedli vyhodnotenie neistoty vstupnej veličiny metódou typu B je založené na iných ako štatistických postupoch analýzy série pozorovaní. Naskytuje sa možnosť analógie so systematickými zložkami chýb, avšak neide o jednoznačnú súvislosť pretože metódou typu B je možné odhadnúť aj vplyv náhodnej chyby, napr. pri kalibrácii použitím predchádzajúcich meraní. Štandardná neistota typu B sa odhaduje pomocou racionálneho úsudku na základe všetkých možných a dostupných informácií. Najčastejšie sa používajú:

- údaje výrobcu meracieho prístroja,
- skúsenosti z predchádzajúcej série meraní,
- skúsenosti s vlastnosťami správania materiálov a techniky a poznatky o nich,
- údaje získané z kalibrácií a z certifikátov,
- neistoty referenčných údajov v príručkach.

Pri určovaní neistoty typu B sa vychádza z čiastkových neistôt jednotlivých zdrojov $u_{\mathrm{B}z_j}$. Keď poznáme maximálnu odchýlku j-teho zdroja neistoty $z_{j\,\max}$, neistota $u_{\mathrm{B}z_j}$ sa určí podľa vzťahu

$$u_{\mathrm{B}z_j} = \frac{z_{j\,\max}}{k}, \tag{12}$$

kde k je súčiniteľ získaný zo zákona rozdelenia pravdepodobnosti, ktorým sa riadi zdroj neistoty (napr. pre normálne rozdelenie je $k = 2$, prípadne 3, pre rovnomerné rozdelenie $k = \sqrt{3}$, pre trojuholníkové rozdelenie $k = \sqrt{6}$ atď., podrobnosti pozri odkaz *Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti*).[2] V niektorých prípadoch môže byť už neistota $u_{\mathrm{B}z_j}$ známa, napr. z kalibračného certifikátu výrobcu meracieho prístroja. Výsledná neistota sa metódou B určí podobne ako v prípade závislosti vstupných funkcií od viacerých parametrov, pre p zdrojov $z_1, z_2, \ldots, z_j, \ldots, z_p$ platí

$$u_{\mathrm{B}f} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} A_j^2 u_{\mathrm{B}z_j}^2}, \tag{13}$$

kde $u_{\mathrm{B}z_j}$ sú neistoty jednotlivých zdrojov a A_j sú ich súčinitele citlivosti. Takýmto spôsobom sa neistota vyhodnocovaná metódou typu B prevedie do nového tvaru a vzhľadom na predchádzajúce predstavy aj tieto neistoty získavajú charakter smerodajnej odchýlky. Ako s takými, prípadne s ich druhými mocninami ako s rozptylom, sa pracuje ďalej. V samostatnej časti to ukážeme na príkladoch.

Kombinovaná a rozšírená neistota

V praxi sa zriedka vystačí len s jedným alebo druhým typom neistoty samostatne. Potom je potrebné stanoviť výsledný efekt kombinovaných neistôt meraní (alebo určení) oboch typov, A a B. Výsledná kombinovaná neistota veličiny f sa označuje $u_{\mathrm{C}f}$ a je vlastne odhadom smerodajnej odchýlky spojenej s výsledkom, ktorý je rovný druhej odmocnine kombinovaného rozptylu získaného zo všetkých rozptylov vstupných veličín; druhej odmocnine zo súčtu štvorcov oboch typov neistôt A a B podľa vzťahu

$$u_{\mathrm{C}f} = \sqrt{u_{\mathrm{A}f}^2 + u_{\mathrm{B}f}^2} \tag{14}$$

a zo všetkých prípadných kovariancií. Postup na stanovenie kombinovanej standardnej neistoty je iný pre *nekorelované* a iný pre *korelované* veličiny.

Pre veličiny *nekorelované* (vzájomne nezávislé) je kombinovaná standardná neistota $u_{\mathrm{C}f}$ stanovená ako kladná druhá odmocnina z kombinovaného rozptylu $u_{\mathrm{C}f}^2$, ktorý sa určí pomocou vzťahu

$$u_{\mathrm{C}f}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i), \tag{15}$$

kde F je funkcia vyjadrujúca závislosť výstupnej veličiny f od vstupných veličín x_i.

Pre veličiny *korelované* (vzájomne závislé) vstupujú do neistôt aj ich *kovariancie* $D(x_i, x_k)$ vzťahujúce sa na odhady x_i a x_k ako ďalší vplyv na vyjadrovanú neistotu

$$D(x_i, x_k) = u(x_i) \cdot u(x_k) \cdot r(x_i, x_k), \tag{16}$$

[2] V prípadoch, keď môžeme odhadnúť len dolnú (z^-) a hornú hranicu (z^+) meranej veličiny X_i a ďalšie informácie nemáme k dispozícii, je vhodné priradiť (prisúdiť) meranej veličine *rovnomerné rozdelenie* a ako mieru neistoty $u_{\mathrm{B}}(X_i)$ použiť odhad smerodajnej odchýlky $s(X_i)$ tohto rozdelenia, teda $u_{\mathrm{B}}(X_i) = s(X_i) = \sqrt{\frac{(z^+ - z^-)^2}{12}}$.

kde $r(x_i, x_k)$ je korelačný koeficient. Kovarianciu dvoch náhodných veličín $x_i^{(k)}$ a $x_k^{(k)}$, ktorých odhady sú získané z hodnôt opakovaných meraní a sú vyjadrené aritmetickými priemermi $\overline{x}_i^{(k)}$ a $\overline{x}_k^{(k)}$, môžeme určiť podľa nasledujúceho vzťahu (horný index (k) vyjadruje, že máme do činenia s korelovanými veličinami)

$$D(x_i, x_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_{i,j}^{(k)} - \overline{x}_i^{(k)})(x_{k,j}^{(k)} - \overline{x}_k^{(k)}). \tag{17}$$

Kombinovaný rozptyl vzťahujúci sa na odhad funkčne závislej výstupnej veličiny od korelovaných vstupných veličín je vyjadrený vzťahom

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{C}}^2(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + \\ + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_k} D(x_i, x_k). \end{aligned} \tag{18}$$

Kombinovaná štandardná neistota je rovná odmocnine s takto vyjadreného kombinovaného rozptylu. Z vyjadrenia rozvoja neistôt získame príspevky jednotlivých zdrojov neistôt k celkovej neistote, preto je vhodné previesť v tejto fáze analýzu príspevkov jednotlivých zdrojov celkovej (kombinovanej štandardnej) neistoty a na základe jej výsledku prípadne previesť úpravu metodiky merania za účelom zníženia neistôt, ktoré sa na celkovej neistote najviac podieľajú.

Tam kde nevystačíme so štandardnými neistotami je potrebné použiť ich *rozšírenie* pomocou koeficientu rozšírenia k_{r}. Pôvodne stanovená smerodajná odchýlka (teda aj štandardná neistota) predstavuje napr. pri najčastejšie používanom *normálnom rozdelení* interval určený s pravdepodobnosťou asi 68 %. Podobne je to aj pri iných typoch (zákonoch) rozdelenia pravdepodobnosti. Aby sme dosiahli väčší interval pokrytia, blížiaceho sa k 100 %, je potrebné rozšíriť štandardnú neistotu koeficientom rozšírenia k_{r}, ktorého význam je v podstate zhodný s významom kvantilov pri Gaussovom (normálnom) rozdelení, kde $k_{\mathrm{r}} = 2$ pre rozšírenie na 95%-nú a $k_{\mathrm{r}} = 3$ pre rozšírenie na 99,7%-nú pravdepodobnosť a pod. Rozšírená neistota je potom vyjadrená vzťahom

$$U_f = k_{\mathrm{r}} \cdot u_{\mathrm{C}f}, \tag{19}$$

kde U_f je rozšírená neistota, k_{r} je koeficient rozšírenia a $u_{\mathrm{C}f}$ je kombinovaná neistota. *Výsledok merania* sa potom vyjadrí v tvare

$$f = \overline{f} \pm U_f \tag{20}$$

a znamená, že najlepším odhadom meranej veličiny je f a že interval od $f - U_f$ do $f + U_f$ je interval, od ktorého je možné očakávať, že obkopuje veľkú časť hodnôt, ktoré môžu byť priradené (prisúdené) výstupnej veličine f.

Zdroje neistôt

Ako zdroje neistôt môžeme označiť všetky javy, ktoré nejakým spôsobom môžu ovplyvňovať neurčitosť jednoznačného stanovenia výsledku merania a tým odďaľujú (posúvajú) nameranú hodnotu od skutočnej hodnoty. Veľký vplyv na výsledok má aj tá skutočnosť akú meraciu metódu používame, priamu alebo nepriamu. Na neistoty tiež vplýva výber meracích prístrojov (analogových alebo číslicových), vzorkovačov, použitie rôznych filtrov, iných prostriedkov a zariadení v celej trase prenosu a úprave meraného signálu. K neistotám výrazne prispievajú rušivé vplyvy prostredia v najširšom slova zmysle. Na tomto mieste spomenieme najčastejšie sa vyskytujúce zdroje neistôt:

- nevhodný výber prístroja (rozlišovacia schopnosť a pod.),
- neúplná alebo nedokonalaá definícia meranej veličiny alebo jej realizácia,
- nevhodný, resp. nereprezentatívny výber vzoriek merania,
- nevhodný postup pri meraní,
- zjednodušenie alebo nesprávne zaokrúhlenie konštánt a prevzatých hodnôt,
- linearizácia, aproximácia, interpolácia alebo extrapolácia pri vyhodnocovaní,
- nekompenzované alebo neznáme vplyvy prostredia,

- nedodržanie zhodných podmienok pri opakovaných meraniach,
- subjektívne vplyvy obsluhy (experimentátora),
- nepresnosť etalónov a referenčných zdrojov alebo materiálov.

Niektoré zo zdrojov sa prejavujú významne alebo výhradne v neistotách vyhodnocovaných metódou typu A, iné zase pri požití metódy typu B. Mnohé zdroje môžu byť príčinou oboch skupín neistôt a preto vzniká nebezpečenstvo v podobe zabudnutia (vynechania) jednej zo zložiek, čo môže mať výrazne skreslujúci účinok. Situácia sa komplikuje, keď na meranie niekoľkých vstupných veličín používame rovnaký merací prístroj alebo keď sú medzi vstupnými parametrami iné kovariačné väzby. Výsledná neistota je potom podstatne väčšia a celá metodika spracovania nameraných údajov je primerane zložitejšia.

Príklady stanovenia neistoty

Čísla, ktoré vyjadrujú výsledok merania v tvare $f = \overline{f} \pm U_f$ (alebo $f = \overline{f} \pm u_{Cf}$) sú získané výpočtom a majú obyčajne toľko desatinných miest, koľko zobrazí použité výpočtové zariadenie (počítač, kalkulačka a pod.) V zobrazenom čísle sa číslice s výnimkou núl na začiatku zobrazenej hodnoty označujú ako *platné číslice*, napr. číslo 0,003 001 40 má šesť platných číslic (miest). *Výsledná neistota merania* sa zaokrubľuje najviac na *dve platné číslice*. Takýto postup vnáša do výslednej číselnej hodnoty intervalu neistoty hodnoty zaokrúhľovaciu chybu nanajvýš 0,5 %. Napríklad výsledkom výpočtu je číslo 0,004 323 4, zaokrúhlením získame hodnotu 0,004 3, alebo výsledkom výpočtu je číslo 0,004 023 4, zaokrúhlením získame hodnotu 0,004 0 (keď je druhou platnou číslicou nula, treba ju vo výsledku uviesť). Z formátu čísla vyjadrujúceho interval neistoty U_f vyplýva aj formát čísla $\overline{f}$, ktoré nemá význam uvádzať v nižšom ráde ako je rád poslednej platnej číslice neistoty. Uvedieme príklady:

1. Výpočtom sme získali tieto nezaokrúhlené čísla:

$$\begin{aligned} \overline{f} &= 38{,}395\,799\,\mathrm{cm}^2 \\ U_f &= 0{,}155\,911\,8\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

2. Po zaokrúhlení ich zapíšeme v tvare:

$$\begin{aligned} \overline{f} &= 38{,}40\,\mathrm{cm}^2 \\ U_f &= 0{,}16\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

3. Výsledok merania uvedieme v tvare:

$$f = (38{,}40 \pm 0{,}16)\,\mathrm{cm}^2$$

4. Pri zaokrúhlení na jedno (platné) desatinné miesto:

$$f = (38{,}4 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}^2$$

5. Ďalšie možnosti zápisu výsledkov meraní:

$$\begin{aligned} I &= (8{,}37 \pm 0{,}24)\,10^{-3}\,\mathrm{A} \\ p &= (1{,}2017 \pm 0{,}0024)\,\mathrm{Pa} \\ \lambda &= 2{,}037(4)\,\mathrm{nm} \end{aligned}$$

Poslednú formu zápisu výsledku merania používajú niektoré odborné časopisy a nahradzuje klasický tvar zápisu $\lambda = (2{,}037 \pm 0{,}004)\,\mathrm{nm}$.

Číslicový merací prístroj[3]

Postup odhadu neistoty výsledku merania (typ B) je pre daný typ meracieho prístroja obyčajne stanovený výrobcom. Keď nemáme k dispozícii tento postup alebo nie je stanovený inak, je neistota výsledku principiálne určená diskrétnym charakterom číselného údaja na displeji prístroja. Najjemnejší krok delenia δ daného rozsahu meracieho prístroja X_{mr} je určený zmenou

[3]Dovolená chyba číslicového voltmetra (ampérmetra) sa udáva súčtom relatívnej chyby v percentách δ_{mh} z meranej hodnoty a relatívnej chyby δ_{mr} v percentách, vzťahuje sa na najväčšiu hodnotu meracieho rozsahu prístroja (podrobnejšie pozri časť *Chyby elektrických meracích prístrojov*).

údaja na poslednom digite o hodnotu ± 1. Napríklad pre prístroj s päť digitovým displejom je $\delta = 10^{-5}\,X_{\mathrm{mr}}$ a meraná veličina sa s istotou nachádza v intervale hodnoty zobrazenej na displeji plus δ. Rozdelenie pravdepodobnosti výskytu meranej veličiny v tomto intervale sa obyčajne považuje za rovnomerné. Potom sa stredná hodnota meranej veličiny odhaduje hodnotou zobrazenou na displeji plus $\delta/2$ a príslušná neistota výsledku sa odhadne štandardnou odchýlkou rovnomerného rozdelenia

$$u_{\mathrm{B}} = \frac{\delta}{\sqrt{12}} = \frac{\delta}{2\sqrt{3}}. \tag{21}$$

Jedným zo zdrojov neistoty je rozlíšiteľnosť poslednej platnej číslice. Napriek tomu, že sa pri opakovanom meraní údaj na displeji nemení nie je neistota merania nulová. Pri odhade neistoty sa používa *model rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti* v intervale, ktorý je vymedzený rozlišovaciou schopnosťou δ daného prístroja podľa vzťahu (21).

Príklad A:

Číslicový voltmeter opakovane ukazuje na displeji napätie $U = 14{,}12$ V pri rozlíšení 10 mV (presnosť 10 mV), môžeme teda predpokladať, že $\delta^{(1)} = 0{,}01$ V a neistota je rovná

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{B}}^{(1)} &= \frac{0{,}01}{2\sqrt{3}} = 0{,}002\,886\,75 \text{ V} = \\ &= 0{,}002\,9 \text{ V} \approx 0{,}003 \text{ V}. \end{aligned} \tag{22}$$

Údaj v technickej dokumentácii voltmetra nás však informuje, že na rozsahu 20 V pri rozlíšení 10 mV (1 digit) má voltmeter presnosť (0,3 % meranej hodnoty + 1 digit). Potom

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} &= \left(\frac{14{,}12}{100}\,0{,}3\,\% + 0{,}01\right) = \\ &= (0{,}042\,36 + 0{,}01) = 0{,}052\,36 \text{ V}. \end{aligned} \tag{23}$$

Príslušná zložka neistoty bude

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{B}} &= \frac{\delta^{(2)}}{2\sqrt{3}} = \frac{0{,}052\,36}{2\sqrt{3}} = \\ &= 0{,}015\,115\,03 \text{ V} \approx 0{,}015 \text{ V}, \end{aligned} \tag{24}$$

čo je ale hodnota $5\times$ väčšia, ako z predchádzajúceho výpočtu.

Príklad B:

Pri meraní číslicovým ampérmetrom s piatimi digitmi na rozsahu 10 A je údaj na displeji $I = 0{,}003\,5$ A. Meraný prúd sa teda nachádza v intervale $\delta I = (0{,}003\,5 \div 0{,}003\,6)$ A. Strednú hodnotu meraného prúdu odhadneme ako $\overline{I} = 0{,}003\,55$ A. Pre neistotu merania v prípade použitia *modelu rovnomerného rozdelenia* výskytu meranej veličiny dostávame

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{B}I} &= \frac{10^{-4}}{2\sqrt{3}} = 28{,}867\,5 \cdot 10^{-6} \text{ A} = \\ &= 0{,}000\,029 \text{ A} \end{aligned} \tag{25}$$

a pre *model normálneho rozdelenia* výskytu meranej veličiny je vysledok neistoty rovný

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{B}I} &= \frac{10^{-4}}{6} = 16{,}666\,67 \cdot 10^{-6} \text{ A} = \\ &= 0{,}000\,017 \text{ A}. \end{aligned} \tag{26}$$

Výsledok merania pre model rovnomerného rozdelenia potom zapíšeme v tvare

$$I = (0{,}003\,550 \pm 0{,}000\,029) \text{ A}. \tag{27}$$

Posuvné meradlo

V prípade posuvného meradla s najjemnejším delením stupnice 0,1 mm, keď predpokladáme rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti, je interval neistoty výsledku merania podľa predchádzajúcej zásady (v časti *Číslicový merací prístroj*) rovný $\delta = 0{,}2$ mm a podľa vzťahu (21)

$$u_{\mathrm{B}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{3}} = 0{,}057\,735 \text{ mm} = 0{,}058 \text{ mm}. \tag{28}$$

Jednoduché meranie teploty

Bežným liehovým teplomerom meriame teplotu kvapaliny v nádobe, pričom predpokladáme, že na teplomer nepôsobia iné, ako v danom prípade zanedbateľné vplyvy (sálanie, premenlivá teplota okolia, zmeny prúdenia vzduchu v miestnosti a pod.). Presnosť merania teplomerom je daná ako chyba odčítania teploty s veľkosťou jedného dielika stupnice, čiže $\pm 1\,°\mathrm{C}$. Výraz presnosť tu chápeme „klasicky“ prostredníctvom chyby, teda nie ako neistotu. Meranie prevádzame opakovane v rôznych miestach nádoby tak, aby bolo možné určiť priemernú teplotu kvapaliny. Predpokladom merania je aj to, aby teplotné pole v meranom priestore bolo homogénne. Keď je táto podmienka splnená nemáme dôvod uvažovať o ďalších prídavných korekciách a môžeme použiť takýto postup.

Opakovaným meraním, pri dostatočnej dobe ustálenia údaja teplomera (vylúčime prípadnú dynamickú chybu) sa získa minimálne potrebných desať meraní. Odhadom priemernej teploty $\bar{t}$ je aritmetický priemer zo všetkých desatich hodnôt $\bar{t} = 35{,}4\,°\mathrm{C}$. *Štandardná neistota typu A* je reprezentovaná smerodajnou odchýlkou súboru nameraných hodnôt od aritmetického priemeru

$$u_\mathrm{A}(t) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2} = 0{,}360\,°\mathrm{C}. \qquad (29)$$

Štandardná neistota typu B má pri danom usporiadaní merania jediný zdroj, ktorým je chyba odčítania s hodnotou $\pm 1\,°\mathrm{C}$. Oprávnene môžeme predpokladať rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti chyby teplomera, čiže

$$u_\mathrm{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}578\,°\mathrm{C}. \qquad (30)$$

Kombinovanú štandardnú neistotu získame zlúčením oboch zložiek

$$\begin{aligned} u_\mathrm{C}(t) &= \sqrt{u_\mathrm{A}^2(t) + u_\mathrm{B}^2(t)} = \\ &= \sqrt{0{,}360^2 + 0{,}578^2} = 0{,}681\,°\mathrm{C}. \end{aligned} \qquad (31)$$

Výsledok merania môžeme prezentovať pomocou *rozšírenej neistoty* s koeficientom rozšírenia $k_\mathrm{r} = 2$ (skutočná priemerná teplota sa nachádza v intervale neistoty s asi 95%-nou pravdepodobnosťou), takže zápis po zaokrúhlení na dve platné miesta bude mať tvar

$$t = (35{,}40 \pm 1{,}36)\,°\mathrm{C}. \qquad (32)$$

V tabuľke 1 uvádzame orientačné hodnoty odhadu chýb niektorých meracích prístrojov a zariadení.

Tabuľka 1: Hodnoty odhadu chýb niektorých meracích prístrojov

Meracie zariadenie	**Delenie stupnice**	**Chyba $\mathbf{z_{max}}$**
Pásové meradlo	10 dielikov na 1 cm	1 mm
Posuvné meradlo	10 dielikov na nónius	0,1 mm
Posuvné meradlo	20 dielikov na nónius	0,05 mm
Posuvné meradlo	50 dielikov na nónius	0,02 mm
Mikrometer	50 dielikov na 0,5 mm	0,01 mm
Mechanické stopky	5 dielikov na 1 s	0,2 s
Digitálne stopky	min : sek : $\frac{\text{sek}}{100}$	0,01 s
Teplomer	5, 2 alebo 1 dielik na 1 °C	$(0{,}2 \div 1)\,°\mathrm{C}$

2 Chyby elektrických meracích prístrojov

Chyby analogových meracích prístrojov

Pre praktickú potrebu bola zvolená a normovaná charakteristika nazývaná *trieda presnosti* δ_{TP}. Trieda presnosti zahrňa všetky chyby samotného prístroja a definuje tak medznú (maximálnu, dovolenú) relatívnu chybu v celom meracom rozsahu prístroja

$$\delta_{\mathrm{TP}} = \frac{|\Delta_{\max}|}{X_{\mathrm{mr}}} 100\,(\%), \tag{33}$$

kde $\Delta_{\max}$ je medzná (maximálna) absulútna chyba prístroja a X_{mr} je najväčšia hodnota meracieho rozsahu. *Merací rozsah* je časť stupnice meracieho prístroja, na ktorej je možné merať s predpísanou presnosťou. Najväčšia hodnota meracieho rozsahu X_{mr} je určená

- hornou hranicou meracieho rozsahu (keď je dolná hranica nula),
- súčtom oboch medzných hraníc (keď je nula uprostred stupnice),
- rozdielom hornej a dolnej hranice (keď je potlačená nula na stupnici).

Keď má prístroj určitú tiedu presnosti je tým definovaná jeho maximálna dovolená relatívna chyba vyjadrená v % najväčšej hodnoty meracieho rozsahu. Trieda presnosti je uvedená na číselníku každého analogového meracieho prístroja. *Maximálnu absolútnu chybu prístroja* možeme vyjadriť vzťahom

$$\Delta_{\max} = \pm \frac{X_{\mathrm{mr}}}{100}\,\delta_{\mathrm{TP}}. \tag{34}$$

Relatívna chyba meraného údaja je

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \pm \frac{\Delta_{\max}}{X_{\mathrm{mh}}} 100 = \pm \delta_{\mathrm{TP}} \frac{X_{\mathrm{mr}}}{X_{\mathrm{mh}}}\,(\%),$$

kde X_{mh} je nameraná hodnota. Z posledného vzťahu je vidieť, že čím menšia je meraná hodnota (čím menšia je výchylka prístroja), tým väčšia bude relatívna chyba merania. Z toho vyplýva, že pri meraní analogovými meracími prístrojmi musíme voliť taký rozsah prístroja, aby jeho výchylka bola čo najväčšia!

Príklad A

Analogovým voltmetrom s triedou presnosti $\delta_{\mathrm{TP}} = 1$ sme namerali na rozsahu $X_{\mathrm{mr}} = 60\,\mathrm{V}$ napätia 58 V a 5 V.

Absolútna chyba je pri všetkých meraniach rovnaká a je daná triedou presnosti použitého voltmetra

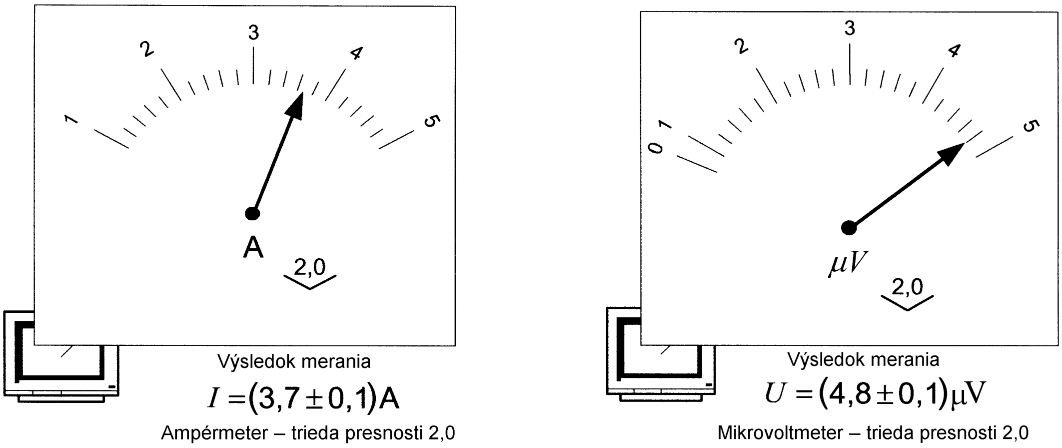
$$\Delta_{\max} = \pm \frac{X_{\mathrm{mr}}}{100}\,\delta_{\mathrm{TP}} = \pm \frac{60}{100}\,1 = \pm 0{,}6\,\mathrm{V}.$$

To znamená, že prístroj meria s presnosťou $\pm 0{,}6\,\mathrm{V}$ na celej stupnici pri meraní napätia 58 V aj pri meraní napätia 5 V. Veľkosti relatívnych chýb údajov budú

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \pm \delta_{\mathrm{TP}} \frac{X_{\mathrm{mr}}}{X_{\mathrm{mh}}} = \pm 1\,\frac{60}{58} = \pm 1{,}03\,\%,$$

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \pm \delta_{\mathrm{TP}} \frac{X_{\mathrm{mr}}}{X_{\mathrm{mh}}} = \pm 1\,\frac{60}{5} = \pm 12\,\%.$$

Vidieť, že so znižovaním výchylky relatívna chyba údaja rýchle rastie, jej závislosť od výchylky je hyperbolická!



Obrázok 1: Na obrázku vidíme príklady zobrazenia hodnoty prúdu a napätia analogovými meracími prístrojmi s triedou presnosti 2,0. Maximálna absolútna chyba hodnoty merania bola vypočítaná pomocou vzťahu (34)

Chyby číslicových meracích prístrojov

Číslicové (digitálne meracie prístroje) merajú pomerne dobre len jednosmerné napätia a prúdy, ostatné veličiny s niekoľkonásobne väčšiou chybou ako presné analogové (ručičkové) meracie prístroje, pretože sa u týchto prístrojov všetky merané veličiny prevádzajú pomocou usmerňovača na jednosmerné napätie. Usmernené napätie sa ďalej digitalizuje pomocou analogovo-číslicového prevodníka (AD). AD prevodníky vnášajú do merania ďalšie chyby. Nemá teda zmysel overovať triedu presnosti analogového meracieho prístroja pomocou bežného vreckového multimetra!

Väčšina výrobcov číslicových prístrojov uvádza presnosť prístroja (tzv. *základnú chybu*) v tvare $\delta_{\check{c}mp} = \pm(\delta_{mh} + d)$, niektorí v tvare $\delta_{\check{c}mp} = \pm(\delta_{mh} + \delta_{mr})$, kde

δ_{mh} je chyba z nameranej hodnoty, býva vyjadrená v % a je v celom meracom rozsahu konštantná, niekedy sa za ňu pripisuje značka rdg (reading–čítanie),

δ_{mr} je chyba z meracieho rozsahu, nemôžeme ju však jednoducho sčítať s chybou z nameranej hodnoty δ_{mh}, ale ju musíme prepočítať na veľkosť nameranej hodnoty $\left(\delta_{mr}\,\frac{X_{mr}}{X_{mh}}\right)$; niekedy sa za ňu pripisuje značka FS (full scale–plný rozsah),

d je chyba udaná z počtu jednotiek (digitov) posledného miesta displeja. Jej prepočet na chybu z meracieho rozsahu závisí od počtu zobrazovaných miest displeja. Prepočet na percentuálnu chybu z meracieho rozsahu je rovný $\delta_{mr} = \frac{d}{\text{max. počet indikovaných jednotiek}}\,100$ (%).

Celková relatívna chyba číslicového meracieho prístroja je pri meraní vyjadrená vzťahom

$$\delta_{rel} = \pm\left(\delta_{mh} + \delta_{mr}\,\frac{X_{mr}}{X_{mh}}\right)\ (\%), \tag{35}$$

kde X_{mr} je hodnota meracieho rozsahu a X_{mh} je nameraná hodnota.

Súčasné číslicové meracie prístroje majú automatické prepínanie rozsahov, aby bola pri meraní vždy dosiahnutá maximálna presnosť. Podľa maximálneho počtu zobrazených miest zistíme, na ktorom rozsahu multimeter práve meria. Napr. multimeter s maximálnou hodnotou 3 999 prepína pri meraní automaticky rozsahy 400 mV – 4 V – 40 V – 400 V. Multimeter s maximálnou hodnotou 1 999 prepína pri meraní automaticky rozsahy 200 mV – 2 V – 20 V – 200 V. Prepínanie rozsahov na meranie ostatných veličín prebieha podobne. Samozrejme chyby každého multimetra pre jednotlivé rozsahy najdete v návode na používanie meracieho prístroja.

Príklad B

Číslicový voltmeter má na rozsahu 40 V základnú chybu $\pm(0{,}9\,\mathsf{rdg}{+}0{,}1\,\mathsf{FS})$. Máme zistiť, relatívnu chybu nameraných napätí $U_1 = 10$ V a $U_2 = 28$ V na tomto rozsahu.

$$\delta_{\mathrm{rel}}(U_1) = \pm\left(\delta_{\mathrm{mh}} + \delta_{\mathrm{mr}}\,\frac{X_{\mathrm{mr}}}{U_1}\right) = \pm\left(0{,}9 + 0{,}1\,\frac{40}{10}\right) = \pm 1{,}3\,\%,$$

$$\delta_{\mathrm{rel}}(U_2) = \pm\left(\delta_{\mathrm{mh}} + \delta_{\mathrm{mr}}\,\frac{X_{\mathrm{mr}}}{U_2}\right) = \pm\left(0{,}9 + 0{,}1\,\frac{40}{28}\right) = \pm 1{,}04\,\%.$$

Príklad C

Chyba číslicového multimetra s $3\,\frac{1}{2}$ miestným displejom (maximálna indikovaná hodnota je 1 999) je pre meranie striedavého prúdu udaná v tvare $\delta_{\mathrm{mh}} = \pm(1{,}5\,\% + 7\,\mathsf{dibit})$[4]. Máme zistiť veľkosť relatívnej chyby multimetra, keď meriame na rozsahu 40 A prúd 6 A.

Maximálny počet indikovaných jednotiek je 2 000.

$$\delta_{\mathrm{mr}} = \frac{d}{\text{max. počet indikovaných jednotiek}}\,100 = \frac{7}{2\,000}\,100 = 0{,}35\,\%.$$

Celková chyba má tvar $\pm(1{,}5\,\% + 0{,}35\,\mathsf{FS})$.

Relatívnu chybu určíme zo vzťahu

$$\delta_{\mathrm{I}} = \pm\left(\delta_{\mathrm{mh}} + \delta_{\mathrm{mr}}\,\frac{X_{\mathrm{mr}}}{X_{\mathrm{mh}}}\right) = \pm\left(1{,}5 + 0{,}35\,\frac{40}{6}\right) = 3{,}83\,\%.$$

[4] dibit je kombinácia (skupina) dvoch binárnych čísiel (digitov) do jednej alebo štyroch kombinácií. Štyri možné stavy pre dibit sú 00, 01, 10 a 11.

Použitá literatúra

BRANDEJS, M. 2003. *Linux – Praktický průvodce*. Brno : Konvoj, 2006, 2. vydanie, ISBN 80-7302-050-5

BRUNOVSKÁ, A. 1990. *Malá optimalizácia.* Bratislava : Alfa, 1990, ISBN 80-05-00770-1

BUŠA, J. 2006. *Octave – Rozšírený úvod*. Košice, 2006, ISBN 80-8073-595-6

DÁVID, A. 1988. *Numerické metódy na osobnom počítači*. Bratislava : Alfa, 1988

GARCIA, A., L. 2000. *Numerical Methods for Physics*. New Jersey : Prentice-Hall, 2000, ISBN 013--906744-2

HOFMANN, D. 1988. *Priemyselná meracia technika*. Bratislava : ALFA. 1988, ISBN 80-05-00139-8

KAUKIČ, M. 1998. *Numerická analýza I. Základné problémy a metódy*. Žilina : MC Energy s. r. o. 1998

KAUKIČ, M. 2006. *Základy programovania v PyLabe.* Košice, 2006, ISBN 80-8073-634-0

KUBÁČEK, L. – KUBÁČKOVÁ, L. 2000. *Statistika a metrologie.* Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2000, ISBN 80-244-0093-6

KUDRACIK, F. 1999. *Spracovanie experimentálnych dát.* Bratislava : Univerzita Komenského, 1999, ISBN 80-223-1327-0

LYONS, L. 2001. *A practical quide to data analysis for physical science students.* Cambridge : Cambridge University Press, 2001, ISBN 0-521-42463-1

MELOUN, M. – MILITKÝ, J. 2004. *Statistická analýza experimentalních dat.* Praha : Academia, 2004, ISBN 80-200-1254-0

MOLER, C. B. 2004. *Numerical Computing with MATLAB.* Philadelphia : SIAM, 2004, ISBN 0-89871--560-1

NIST 2006. *National Institute of Standards and Technology. Statistical reference Datasets.* `http://www.itl.nist.gov/div898/strd/general/dataarchive.html`

PALENČÁR, R. – VDOLEČEK, F. – HALAJ, M. 2000. *AUTOMA*, č. 7–8, 2000, str. 50–54, `http://www.automa.cz/`

PAZOUREK, J. 1992. *Simulace biologických systému*. Praha : GRADA, 1992, ISBN 80-85623-13-7

PETROVIČ, P. – NADRCHAL, J. – PETROVIČOVÁ, J. 1989. *Programovanie a spracovanie dát I., II.* Košice : Edičné stredisko UPJŠ, 1989

PIRČ, V. – BUŠA, J. 2002. *Numerické metódy*. Košice : elfa, 2002, ISBN 80-89066-25-9

PRESS, W. H. et al. 1992. *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. New York : Cambridge University Press, 1992, 2nd Ed. Kniha v PDF formáte je dostupná na URL adrese: `http://www.nrbook.com/b/bookcpdf.php`

RIEČANOVÁ, Z. a kol. 1987. *Numerické metódy a matematická štatistika*. Bratislava : ALFA, 1987

SQUIRES, G. L. 2001. *Practical Physics.* Cambridge : Cambridge University Press, 2001, ISBN 0-521-77940-5

ŠESTÁK, Z. 2000. *Jak psát a přednášet o vědě*. Praha : Academia, 2000, ISBN 80-200-0755-5

UHRIN, J. – ŠEVČOVIČ, L. – MURÍN, J. 2006. *Fyzikálne merania*. Košice : elfa, 2006, ISBN 80-8086-032-7

VDOLEČEK, F. – PALENČÁR, R. – HALAJ, M. 2001(a). *AUTOMA*, č. 10, 2001, str. 52–56, http://www.automa.cz/

VDOLEČEK, F. – PALENČÁR, R. – HALAJ, M. 2001(b). *AUTOMA*, č. 12, 2001, str. 28–33, http://www.automa.cz/

VDOLEČEK, F. – PALENČÁR, R. – HALAJ, M. 2002(a). *AUTOMA*, č. 4, 2002, str. 41–47, http://www.automa.cz/

VDOLEČEK, F. – PALENČÁR, R. – HALAJ, M. 2002(b). *AUTOMA*, č. 5, 2002, str. 42–45, http://www.automa.cz/

ZVÁRA, K. – ŠTĚPÁN, J. 2001. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Bratislava : VEDA, 2001, ISBN 80-2240736-4

WIMMER, G. – PALENČÁR, R. – WITKOVSKÝ, V. 2001. *Stochastické modely merania*. Bratislava : Grafické štúdio Ing. Peter Juriga, 2001, ISBN 80-968449-2-X