7.3

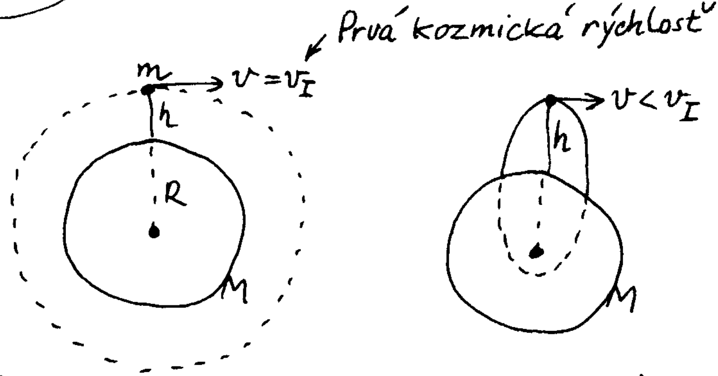
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g}$$

$$g = \frac{k\frac{Mm}{r^2}}{m} = k\frac{M}{r^2}$$

$$g_0 = k\frac{M}{R^2} \quad ; \quad g_h = k\frac{M}{(R+h)^2}$$

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{k\frac{M}{(R+h)^2}}{k\frac{M}{R^2}} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

7.4



Prvou kozmickou rýchlosťou sa rozumie začiatočná rýchlosť telesa (vzhľadom na inerciálny súr. systém sledujúci pohyb Zeme) pri jeho vodorovnom vrhu, v blízkosti zemského povrchu, potrebná, aby teleso už nespadlo na Zem, čiže aby sa stalo jej umelou družicou, za predpokladu, že sa odpor vzduchu zanedbáva.

Táto rýchlosť zrejme splňuje rovnicu

$$\frac{v_I^2}{R} = g_R ,$$ kde g_R je gravitačné zrýchlenie pri zemskom povrchu a R polomer Zeme.

Je potrebné, aby sa zrýchlenie g_R v tomto prípade práve rovnalo <u>dostredivému</u> zrýchleniu pri rovnomernom kruhovom pohybe.

$$g_R = \kappa \frac{M}{R^2} \qquad \frac{v_I^2}{R} = \kappa \frac{M}{R^2}$$

$$v_I^2 = \kappa \frac{M}{R} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3}$$

$$v_I^2 = 6{,}2616326 \cdot 10^7 \ m^2 s^{-2}$$

$$\underline{\underline{v_I = 7913{,}0478 \ m s^{-1}}} .$$

Pokračovanie

Keby sme vodorovnú rýchlosť udeľovali telesu vo výške h nad zemským povrchom, začiatočná rýchlosť bude určená rovnicou

$$\frac{v_I'^2}{R+h} = g_h \ , \text{ kde } g_h \text{ je gravitačné}$$

zrýchlenie vo výške h nad zemským povrchom.

Z výsledku úlohy 7.3. platí

$$g_h = g_R \left(\frac{R}{R+h}\right)^2, \text{ čiže}$$

$$\frac{v_I'^2}{R+h} = g_R \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$v_I'^2 = g_R \frac{R^2}{R+h} = \kappa \frac{M}{R^2} \cdot \frac{R^2}{R+h} =$$

$$= \frac{\kappa M}{R+h} ,$$

alebo

$$v_I'^2 = \underbrace{\sqrt{g_R \cdot R}}_{v_I} \sqrt{\frac{R}{R+h}}$$

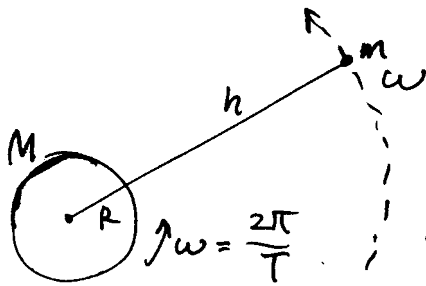
$$v_I'^2 = v_I \sqrt{\frac{R}{R+h}} .$$

Pre $h = 300 \text{ km}$

$$v_I'^2 = 7913{,}0478 \sqrt{\frac{6370}{6370+300}} =$$

$$= \underline{\underline{7733{,}045\,907 \text{ m s}^{-1}}}$$

7.7



$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad v = \omega(R+h)$$

$$\frac{m v^2}{(R+h)} = \kappa \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

$$v^2 = \kappa \frac{M}{(R+h)}$$

$$\omega^2 (R+h)^2 = \kappa \frac{M}{(R+h)}$$

$$\omega^2 = \kappa \frac{M}{(R+h)^3}$$

$$(R+h)^3 = \kappa \frac{M}{\omega^2} = \kappa \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{\omega^2} = g_0 \frac{R^2}{\omega^2}$$

$$(R+h)^3 = g_0 \frac{(TR)^2}{4\pi^2}$$

$$h = \sqrt[3]{g_0 \frac{(TR)^2}{4\pi^2}} - R$$

$$h = \sqrt[3]{9{,}81 \frac{(86400 \cdot 6370 \cdot 10^3)^2}{4\pi^2}} - 6370 \cdot 10^3 =$$

$$= 35\,851\,976 \text{ m} \approx 35\,852 \text{ km}$$

7.8

$$M_z \frac{v^2}{r} = \kappa \frac{M_S M_z}{r^2} \quad ; \quad v = \omega r$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v^2 = \kappa \frac{M_S}{r}$$

$$\omega^2 r^2 = \kappa \frac{M_S}{r}$$

$$M_S = \frac{\omega^2 r^3}{\kappa} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{r^3}{\kappa} =$$

$$= \frac{4\pi^2 (150 \cdot 10^6 \cdot 10^3)^3}{(365 \cdot 86\,400)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} =$$

$$= 2{,}0086 \cdot 10^{30}\,kg \approx \underline{\underline{2{,}01 \cdot 10^{30}\,kg}}$$

7.10

$$E_p = W = \int_{\underbrace{R}_{r_1}}^{\overbrace{R+h}^{r_2}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \kappa M m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \kappa M m \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \kappa M \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) = -\kappa M m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) =$$

$$= -\kappa M m \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = -\kappa M m \frac{R-(R+h)}{R(R+h)} =$$

$$= \kappa M m \frac{h}{R(R+h)} = \underbrace{\frac{\kappa M}{R^2}}_{g_0} m h \frac{R}{(R+h)} = g_0 m h \frac{R}{(R+h)} = E_k$$

Zo zákona zachovania energie platí, že kin. energia telesa pri dopade je rovná polohovej energii Ep!

$h \gg R$

$$\cancel{E_k = \lim_{h \to \infty} g_0 m h \frac{R}{(R+h)}}$$

$$E_k = g_0 m h \frac{R}{\underbrace{(R+h)}_{\to h}} \approx m g_0 R$$

7.12

$$F = m\frac{d^2r}{dt^2} = -\kappa\frac{Mm}{r^2} \quad ; \quad g = \kappa\frac{M}{R^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2r}{dt^2} = -g\frac{R^2}{r^2}}$$ ← Pohybová rovnica telesa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = -g\frac{R^2}{r^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g\frac{R^2}{r^2} \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot v$$

$$\boxed{v\frac{dv}{dr} = -g\frac{R^2}{r^2}}$$ ← Pohybová rovnica telesa po úprave.

$$\int v\,dv = -gR^2\int\frac{dr}{r^2}$$

<u>Na povrchu Zeme platí:</u> (zač. podmienky)

$r = R$

$v = v_0$

$$\frac{v^2}{2} = -gR^2\left(-\frac{1}{r}\right) + C$$

$$C = -\frac{gR^2}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

$$C = -gR + \frac{v_0^2}{2}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{r} - gR + \frac{v_0^2}{2}$$

$$\frac{v^2}{2} = \kappa\frac{M}{R^2}\cdot\frac{R^2}{r} - \kappa\frac{M}{R^2}R + \frac{v_0^2}{2} = \kappa\frac{M}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{\kappa M}{R}\right) > 0$$

Aby teleso nespadlo späť na Zem, rýchlosť v musí byť väčšia ako 0. Teda musí byť splnená podmienka:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{\kappa M}{R} \geq 0$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}}$$

$$v_{II} = v_0 \geq \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 6370\cdot 10^3} = 11\,179{,}418\,\mathrm{ms^{-1}}$$

Táto rýchlosť sa volá (označuje) druhá kozmická rýchlosť.

$$\approx 11{,}2\,\mathrm{kms^{-1}}$$